Διάλεξη 7η

19/04/19

Στατιστική Συμπερασματολογία

Εκτιμητής Μέγιστης Πιθανοφάνειας (ΕΜΠ):

Έστω τ.δ. $\underbrace{X_1, \dots, X_n}_{\text{ανεξάρτητες κ' ισόνομες}}$ από πληθυσμό $f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$

Έστω $x_1, \dots, x_n$ η παρατηρούμενη τιμή του $X_1, \dots, X_n$.

Όλη η πληροφορία για την άγνωστη θ, περιέχεται στο τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ ή στην παρατηρούμενη τιμή του $x_1, \dots, x_n$. Επίσης η πληροφορία για την θ, περιέχεται και στην συνάρτηση του πληθυσμού ή στην $f(\underset{\sim}{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)$

▸ Έστω τ.μ. X με σ.π.π. $f_X(x)$

$$f_X(x) \simeq P(x-\varepsilon < X < x+\varepsilon),\ \varepsilon > 0$$

Ανάλογα: $f(\underset{\sim}{x},\theta) \approx P_\theta(x_1-\varepsilon < X_1 < x_1+\varepsilon, \dots, x_n-\varepsilon < X_n < x_n+\varepsilon)$, $\forall \varepsilon > 0$

όπου τα $x_1, \dots, x_n$ είναι οι παρατηρούμενες τιμές των $X_1, \dots, X_n$.

Επειδή x_i οι παραπάνω τιμές η $P_\theta(x_1-\varepsilon < X_1 < x_1+\varepsilon, \dots, x_n-\varepsilon < X_n < x_n+\varepsilon)$ θα πρέπει να είναι πολύ μεγάλη. Άρα διάλεξε το άγνωστο θ που θα την μεγιστοποιεί ή διάλεξε το θ που μεγιστοποιεί την $f(\underset{\sim}{x},\theta)$.

Ορισμός: (πιθανοφάνεια)

Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $f(x,\theta), \theta \in \Theta$. Ονομάζεται **πιθανοφάνεια** ή συνάρτηση πιθανοφάνειας του τ.δ. την συνάρτηση $L(\theta|\underline{x}) = f(\underline{x},\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta), \theta \in \Theta$

Ορισμός: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $f(x,\theta)$ και έστω $L = L(\theta)$ η πιθανοφάνεια του τ.δ. Ο ΕΜΠ της θ συμβολίζεται με $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1,\dots,X_n)$ και ορίζεται ως

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta) \quad \text{ή} \quad \hat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

Παρατήρηση: α) Εύρεση η εύρεση των ΕΜΠ αυτό είναι πρόβλημα μεγιστοποίησης.

β) Επειδή πολλές κατανομές είναι exp μορφής και επειδή ο log είναι γνήσια αύξουσα, εξυπηρετεί να βρω τον ΕΜΠ από την μέγιστη $\log L(\theta)$. Δηλαδή $\hat{\theta} = \arg\max_{\theta \in \Theta} \{\log L(\theta)\}$.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $N(\mu,\sigma^2)$.

i) Αν σ^2: γνωστό να βρεθεί ο ΕΜΠ της $\theta=\mu$.

ii) Αν μ: γνωστό ——— " ——— $\theta=\sigma^2$.

iii) Αν σ^2, μ: άγνωστο ——— " ——— μ, σ^2.

Λύση

i) $N(\theta,\sigma^2)$ $\quad f(x,\theta)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-1/2\sigma^2(x-\theta)^2}$

$$L=L(\theta)=f(\underset{\sim}{x},\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{\sigma^n(\sqrt{2\pi})^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\theta)^2}$$

$$\log L=-n\log(\sigma\sqrt{2\pi})-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma(x_i-\theta)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L=-\frac{1}{2\sigma^2}2(-1)\Sigma(x_i-\theta)=\frac{1}{\sigma^2}\Sigma(x_i-\theta)$$

$\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L=0$ (Εξίσωση πιθανοφάνειας)

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sigma^2}\Sigma(x_i-\theta)=0\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\Sigma x_i=\bar{x}.$

Το $\hat{\theta}=\bar{x}$ είναι υποψήφια ΕΜΠ:

$\dfrac{\partial^2}{\partial\theta^2}\log L(\theta)\Big|_{\theta=\hat{\theta}=\bar{x}}=\ldots\ldots<0$ (* Δεν θα το υπολογίζω. θα το δέχομαι απ'ευθείας εφόσον έχω ότι $\hat{\theta}=\bar{x}$)

Τελικά το $\hat{\theta}=\dfrac{1}{n}\Sigma X_i=\bar{x}$ είναι ΕΜΠ. της $\theta=\mu$.
(συμπίπτει με τον ΑΟΕΔ)

ii) $N(\mu,\theta)$, $f(x,\theta)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{1}{2\theta}(x-\mu)^2}$

$$L=L(\theta)=f(x,\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta}}e^{-\frac{1}{2\theta}(x_i-\mu)^2}$$

$$=\frac{1}{(2\pi\theta)^{n/2}}e^{-\frac{1}{2\theta}\Sigma(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L=-\frac{n}{2}\log(2\pi\theta)-\frac{1}{2\theta}\Sigma(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L=-\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\Sigma(x_i-\mu)^2$$

Εξίσωση πιθανοφάνειας: $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\log L=0\Rightarrow\ldots\Rightarrow\theta=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

(επιβεβαιώνουμε στην 2η παράγωγο) και τελικά:

$$\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 \quad \text{ο ΕΜΠ της } \sigma^2.$$

iii) $f(x;\mu,\sigma^2) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}$

$$L(\mu,\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\mu\sigma^2) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2}$$

$$= \frac{1}{(\sigma^2(2\pi))^{n/2}}\, e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2}$$

$$\log L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\log(2\pi) - \frac{n}{2}\log\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2$$

<u>Εξισώσεις πιθανοφάνειας:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial\mu}\log L(\mu,\sigma^2)=0 \\ &\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\log L(\mu,\sigma^2)=0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0 \\ &-\frac{n}{2\sigma^2}+\frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2=0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \begin{aligned} &\mu=\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i \\ &\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \end{aligned}$$

(πίνακας 2ων παραγώγων) και τελικά οι ΕΜΠ:

$\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}$ ← συμπίπτει με ΑΟΕΔ.

$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum(x_i-\bar{x})^2$ ← δεν συμπ. με ΑΟΕΔ.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1, \dots, X_n$ από $P(\theta)$, $\theta > 0$,

$$p(x,\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}, \quad x = 0, 1, \dots$$

Να βρεθεί ο ΕΜΠ της θ.

Απόδ.

$$L = L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i,\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-\theta}\theta^{x_i}}{x_i!} = \frac{e^{-n\theta}\theta^{\sum x_i}}{\prod x_i!}$$

$$\log L = -n\theta + (\log\theta)\sum_{i=1}^{n} x_i - \log\prod_{i=1}^{n} x_i!$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L = -n + \frac{1}{\theta}\sum x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\log L = 0 = -n + \frac{1}{\theta}\sum x_i = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow \theta = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}$$

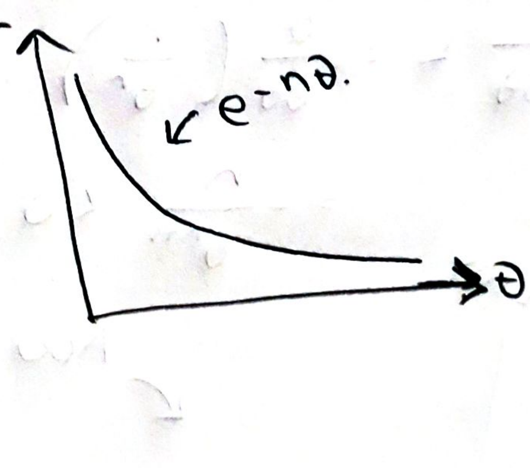
Δεύτερη παράγωγος ....

Τελικά ΕΜΠ: $\hat{\theta} = \frac{1}{n}\sum x_i = \bar{x}$: συμπίπτει με ΑΟΕΔ.

Παρατήρηση: Αυτά ισχύουν αν $\exists$ τουλάχιστον ένα $x_i \neq 0$

Αν όλα τα $x_i = 0$, $\forall i = 1, \dots, n$, τότε

$L = e^{-n\theta}$ ή $\log L = -n\theta$



Η L μεγιστοποιείται για $\theta = 0$.

Αλλά στην Poisson $\theta > 0$.

Άρα $\nexists$ ΕΜΠ της θ.

Παράδειγμα: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $U(0,\theta)$, $\theta>0$.
Να βρεθεί ο ΕΜΠ της θ.

Λύση

Αφού $U(0,\theta)$, $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$

$$L=L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\theta}I_{(0,\theta)}(x_i)\Rightarrow$$

$$L=\frac{1}{\theta^n}\prod_{i=1}^{n}I_{(0,\theta)}(x_i)=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}\cdot 1, & \text{όλα τα } x_i:\ 0<x_i<\theta,\ \forall i\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

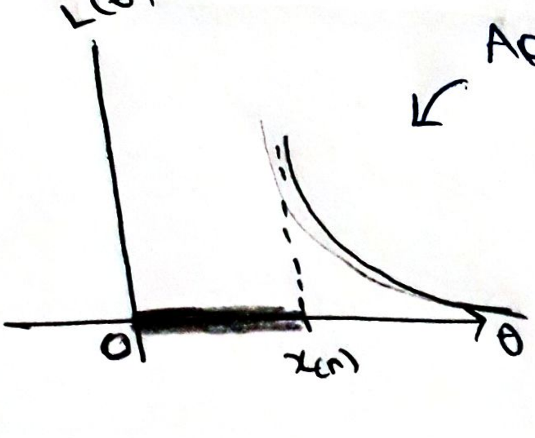
$$=\begin{cases}\frac{1}{\theta^n}, & x_{(n)}<\theta.\\ 0, & \text{αλλού.}\end{cases}$$

Η κλασσική διαδικασία δεν οδηγεί σε λύση και σαν δεύτερη μεθοδολογία: εξετάζω την μονοτονία της L.

2η μεθοδολογία: Εξετάζω μονοτονία:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L=\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\theta^n}\right),\ \text{για } \theta>x_{(n)}$$

$$=-\frac{n}{\theta^{n+1}}<0.\ \text{Άρα } L\downarrow\ \forall\theta>x_{(n)}$$



Άρα η L μεγιστοποιείται στο $\theta=x_{(n)}$.

Τελικά ο ΕΜΠ της θ είναι

$$\hat\theta=X_{(n)}.$$

(*) Ο ΑΟΕΔ ήταν $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω τ.δ. $X_1,\dots,X_n$ από $U(\theta,\theta+1)$, $\theta>0$.
Να βρεθεί ΕΜΠ της θ.

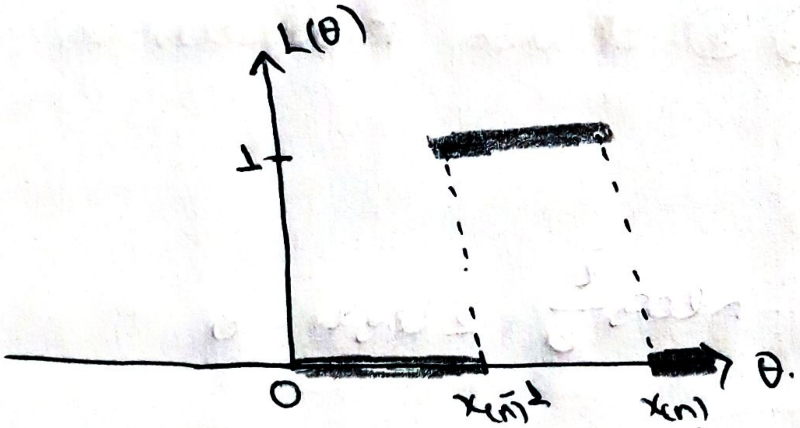
<u>Λύση</u>

$$U(\theta,\theta+1) \longrightarrow f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta+1-\theta}=1, & \theta<x<\theta+1\\ 0, & \text{αλλιώ.}\end{cases}$$

$$L=L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n} 1\cdot I_{(\theta,\theta+1)}(x_i) \Longrightarrow L=\prod_{i=1}^{n} I_{(\theta,\theta+1)}(x_i)$$

$$\Rightarrow L=\begin{cases}1, & \forall i,\ \theta<x_i<\theta+1\\ 0, & \text{αλλιώ.}\end{cases}=\begin{cases}1, & \theta<x_{(1)},\ x_{(n)}<\theta+1\\ 0, & \text{αλλιώ}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow L=\begin{cases}1, & x_{(n)}-1<\theta<x_{(1)}\\ 0, & \forall \text{ άλλο } \theta.\end{cases}$$



Παρατηρώ ότι η L είναι σταθερή στο $(x_{(n)}-1, x_{(1)})$ άρα μεγιστοποιείται $\forall\theta\in(x_{(n)}-1, x_{(1)})$, άρα κάθε $\hat{\theta}\in(x_{(n)}-1, x_{(1)})$ είναι ΕΜΠ της θ.

<u>Π.χ.</u>: $\hat{\theta}=\dfrac{(x_{(n)}-1)+x_{(1)}}{2}$ είναι ΕΜΠ του

<u>Π.χ.</u>: $\hat{\theta}^{\kappa}$ (κυρτός συνδυασμός) $=c\,(x_{(n)}-1)+(1-c)\,x_{(1)}$, $c\in(0,1)$

είναι ΕΜΠ της θ.

Παράδειγμα: Έστω $X_1, \dots, X_n$ από Gamma (α, β), $\alpha, \beta > 0$

ΕΜΠ α, β;

Λύση

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{\alpha} \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}, \quad x > 0$$

$$L(\alpha, \beta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta^{n\alpha} (\Gamma(\alpha))^n} (\prod x_i)^{\alpha-1} e^{-\frac{1}{\beta} \sum x_i}$$

$$\log L = -n\alpha \log \beta - n \log \Gamma(\alpha) + (\alpha - 1) \log \prod x_i - \frac{1}{\beta} \sum x_i$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \alpha} \log L = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \log L = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\begin{array}{l} -n \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - n \log \beta + \sum \log x_i = 0 \quad (1) \\ \alpha \beta = \bar{x} \quad (2) \end{array}}_{(1)\ (2):\ \text{Εξισώσεις πιθανοφάνειας}}$$

Από (2): $\beta = \frac{\bar{x}}{\alpha}$: (3)

Από (1) κ' (3):

$$\underbrace{-n \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} - n \log \frac{\bar{x}}{\alpha} + \sum \log x_i = 0}$$

Εξίσωση ως προς α η οποία δεν λύνεται αναλυτικά ως προς α. Λύνεται όμως αριθμητικά.

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω τ.δ $X_1, \ldots, X_n$ από $U(\theta_1, \theta_2)$, θ_1, θ_2: άγνωστα. Να βρεθούν ΕΜΠ των θ_1, θ_2.

<u>Λύση</u>

$$U(\theta_1,\theta_2) \longrightarrow f(x,\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2-\theta_1}, & \theta_1 < x < \theta_2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

$$L = L(\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta_1,\theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)} I_{(\theta_1,\theta_2)}(x_i)$$

$$= \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} \prod_{i=1}^{n} I_{(\theta_1,\theta_2)}(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n}, & \forall i,\ \theta_1 < x_i < \theta_2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial \theta_1} L > 0$. Άρα $\uparrow$ ως προς θ_1 για $\theta_1 < x_{(1)}$

Άρα η L παίρνει την max τιμή της ως προς θ_1 στο $\theta_1 = x_{(1)}$. Άρα $\hat{\theta}_1 = X_{(1)}$.

Επίσης $\frac{\partial}{\partial \theta_2} L < 0$. Άρα $L \downarrow$ ως προς θ_2, για $\theta_2 > x_{(n)}$

Άρα η L παίρνει την max τιμή της ως προς $\hat{\theta}_2$ στο $\theta_2 = x_{(n)}$. Άρα $\hat{\theta}_2 = X_{(n)}$

<u>Παράδειγμα</u>: Έστω τ.δ $X_1, \ldots, X_n$ από Laplace.

$$f(x,\theta) = \begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & x \geq \theta \\ 0, & x < \theta \end{cases}, \quad -\infty < \theta < +\infty$$

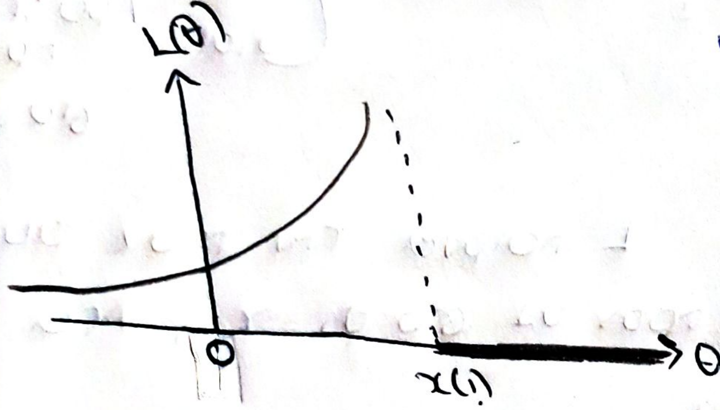
Ζητείται ΕΜΠ της θ.

Λύση

$$L=L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i,\theta)=\prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\theta)} I_{(\theta,\infty)}(x_i)$$

$$=\begin{cases} e^{n\theta}e^{-\sum x_i}, & \forall i,\ \theta<x_i \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

$$L=\begin{cases} e^{n\theta}e^{-\sum x_i}, & \theta<x_{(1)} \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$



Για $\theta<x_{(1)}$ η

$$\frac{\partial}{\partial\theta}L=n e^{-\sum x_i}e^{n\theta}>0, \quad \forall\theta\in(-\infty,x_{(1)})$$

Άρα η $L \nearrow$ στο $(-\infty,x_{(1)})$. Άρα η L μεγιστοποιείται στο $\theta=x_{(1)}$.
Άρα ΕΜΠ $\hat{\theta}=x_{(1)}$.

Ιδιότητες του ΕΜΠ: (1) Ο ΕΜΠ είναι συνάρτηση του επαρκούς στατιστικού.

Έστω $T=T(\underset{\sim}{x})$ επαρκές στατιστικό. Τότε Neyman-Fisher.

$f(\underset{\sim}{x},\theta)=g(T(\underset{\sim}{x}),\theta)h(\underset{\sim}{x})$

Αλλά $L(\theta)=f(\underset{\sim}{x},\theta)$

$L(\theta)=g(T(\underset{\sim}{x}),\theta)h(\underset{\sim}{x})$

Ο ΕΜΠ μεγιστοποιεί την L. Η L είναι συνάρτηση του επαρκούς T. Άρα ο ΕΜΠ είναι συνάρτηση του επαρκούς T.

② "1-1" συναρτήσεις ΕΜΠ. Είναι ΕΜΠ της "1-1" συνάρτησης

Απόδειξη: αν $\hat{\theta}$ είναι ΕΜΠ της θ και g είναι "1-1" συνάρτηση, τότε $g(\hat{\theta})$ είναι ΕΜΠ της $g(\theta)$.

Π.χ. Στην $N(\mu,\sigma^2)$, σ^2: γνωστό ο ΕΜΠ της μ είναι $\hat{\mu}=\bar{x}$. Ποιος είναι ο ΕΜΠ της $2\mu+3$; → είναι $2\hat{\mu}+3$

Ποιος είναι ο ΕΜΠ της μ^2; → ο $\underline{\underline{\bar{x}^2}}$ όχι, διότι

η συναρτ. $\omega(z)=z^2$
δεν είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$.
Είναι "1-1" στο $\mathbb{R}^+$.

③ Κάτω από κανονικότητες συνθήκες ο ΕΜΠ είναι συνεπής.

④ Κάτω από κανονικότητες συνθήκες για $n\to\infty$ ο ΕΜΠ: $\hat{\theta} \sim N\left(\theta, \frac{1}{nI_X^F(\theta)} = \kappa\varphi_{C-R}\right)$ (*) Για $n\to\infty$ θα γίνεται ΑΟΕΑ.